2 билет

1. Составление уравнений движения гироскопа принципом Даламбера**, уравнений Эйлера стр 64, теоремой Резаля**

Принцип Даламбера для классического трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе:

Начало на стр. 16 (15) со слов: “Пользуясь принципом Даламбера, составим уравнение относительно осей *Oxyz”*

И до собственного движения на следующей странице.

Составление уравнений Эйлера

нения оси гироскопа от инерциальной СК $O\xi\eta\zeta$. Пользуясь принципом Даламбера, составим уравнение относительно осей $Oxyz$ (осей Резаля), связанных с внутренней рамкой гироскопа:

$$\bar{M}_{\text{ин}} + \bar{M}_{\text{г}} + \bar{M}_{\text{вн}} = 0, \tag{6}$$

где $M_{\text{ин}}$ — момент инерции твердого тела, равный произведению момента инерции A на угловое ускорение и направленный

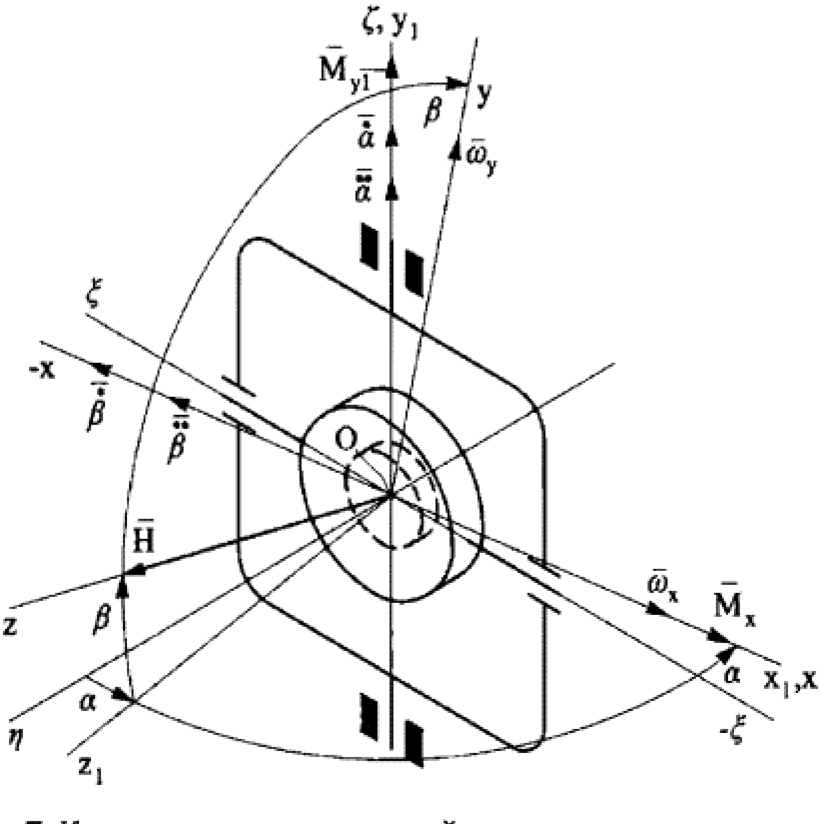


Рис. 7. К составлению уравнений движения трехстепенного гироскопа

противоположно вектору углового ускорения $\dot{\omega}_x$ и $\dot{\omega}_y$ ($-A\dot{\omega}_x$, $-A\dot{\omega}_y$); $M_г$ — гироскопический момент ($-H\omega_y$, $H\omega_x$); $M_{вн}$ — момент внешних сил.Абсолютные угловые скорости и угловые ускорения в проекциях на оси Резаля:

$$\begin{gathered} \omega_y = \dot{\alpha}\cos\beta \approx \dot{\alpha};\;\; \dot{\omega}_y = \ddot{\alpha}; \\ \omega_x = -\dot{\beta};\;\; \dot{\omega}_x = -\ddot{\beta}. \end{gathered} \tag{7}$$

Уравнения вынужденного движения трехстепенного гироскопа в соответствии с выражением (6):

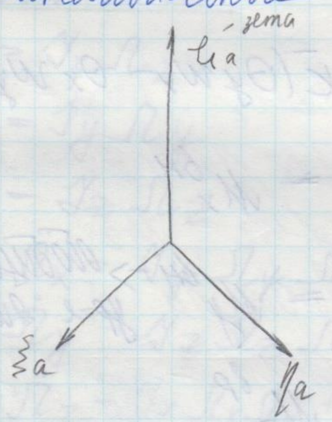
$$\begin{gathered} -A\dot{\omega}_x - H\omega_y + M_x = 0; \\ -A\dot{\omega}_y + H\omega_x + M_{y1} = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

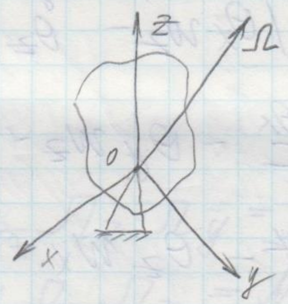
или с учетом соотношений (7)

$$\begin{gathered} A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + M_x = 0; \\ -A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} + M_y = 0, \end{gathered} \tag{9}$$

где A — экваториальный момент инерции ротора; M_x, $M_y \approx$ $\approx M_{y1}$ — внешние моменты, действующие вокруг осей карданова подвеса.

Динамические уравнения Эйлера





Будем считать, что xyz — это подвижная система координат.

$\bar{w} = (w_x, w_y, w_z)$, $\theta = (\theta_x, \theta_y, \theta_z)$

$\xi_a \eta_a \zeta_a$ — абсолютная система коорд-т.

xyz — вращается вокруг абс. трехгранника со скоростью w

$\Omega = (\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z)$ - абс. угловая скорость твердого тела.

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt} = M^{вн} = \overset{\text{локальная производная}}{\frac{\tilde{d}\,\bar{\theta}}{dt}} + \bar{w} \times \bar{\theta}$$

$$\frac{\tilde{d}\theta}{dt} = \bar{i}\cdot\frac{d\theta_x}{dt} + \bar{j}\cdot\frac{d\theta_y}{dt} + \bar{k}\cdot\frac{d\theta_z}{dt}$$

$$\bar{w} \times \bar{\theta} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ w_x & w_y & w_z \\ \theta_x & \theta_y & \theta_z \end{vmatrix} = \bar{i}(\theta_z w_y - \theta_y w_z) +$$

$$+ \bar{j}(\theta_x w_z - \theta_z w_x) + \bar{k}(\theta_y w_x - \theta_x w_y)$$

$$\begin{cases} \frac{d\theta_x}{dt} - \theta_y w_z + \theta_z w_y = M_x^{вн} \\ \frac{d\theta_y}{dt} - \theta_z w_x + \theta_x \cdot w_z = M_y^{вн} \rightarrow \text{обобщенные ур-е Эйлера} \\ \frac{d\theta_z}{dt} - \theta_x w_y + \theta_y w_x = M_z^{вр} \end{cases}$$

Записаны для случая, когда $w \neq \Omega$

Если $w = \Omega$ значит тело связано с системой коорд. можно записать необобщ. ур-е Эйлера:

$$\frac{d\theta_x}{dt} - \theta_y \Omega_z + \theta_z \Omega_y = M_x^{вн}$$

$$\frac{d\theta_y}{dt} - \theta_z \Omega_x + \theta_x \Omega_z = M_y^{вн}$$

$$\frac{d\theta_z}{dt} - \theta_x \Omega_y + \theta_y \Omega_x = M_z^{вн.}$$

26.02.2014

Лекция № 4-5.

Продолжение:

$\theta_x = J_x \Omega_x$

$\theta_y = J_y \Omega_y$

$\theta_z = J_z \Omega_z$

$$\begin{cases} J_x \dot{\Omega}_x - J_y \Omega_y \Omega_z + J_z \Omega_z \Omega_y = M_x^{вн} \\ J_y \dot{\Omega}_y - J_z \Omega_z \Omega_x + J_x \Omega_x \Omega_z = M_y^{вн.} \\ J_z \dot{\Omega}_z - J_x \Omega_x \Omega_y + J_y \Omega_y \Omega_x = M_z^{вн.} \end{cases}$$

$J_x = A$; $J_y = B$; $J_z = C$

$$\begin{cases} A \dot{\Omega}_x - (B - C) \Omega_y \Omega_z = M_x^{вн} \\ B \dot{\Omega}_y - (C - A) \Omega_x \Omega_z = M_y^{вн.} \\ C \dot{\Omega}_z - (A - B) \Omega_x \Omega_y = M_z^{вн.} \end{cases}$$

$\Omega_x = w_x$

$\Omega_y = w_y$

$\Omega_z = w_z + \underbrace{\dot{\varphi}}_{\text{скорость собств. вращения гироскопа}}$

$$\begin{cases} \dfrac{d\theta_x}{dt} = \theta_y w_z + \theta_z w_y = M_x^{вн.} \\ \dfrac{d\theta_y}{dt} = \theta_z w_x + \theta_x w_z = M_y^{вн} \\ \dfrac{d\theta_z}{dt} = \theta_x w_y + \theta_y w_x = M_z^{вн.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_x \dot{\Omega}_x - J_y w_y w_z + J_z(w_z + \dot{\varphi}) w_y = M_x^{вн} \\ J_y \dot{\Omega}_y - J_z(w_z + \dot{\varphi}) w_x + J_x w_x w_z = M_y^{вн.} \\ J_z \dot{\Omega}_z - \underbrace{J_x w_x w_y + J_y w_y w_x}_{0} = M_z^{вн} \end{cases}$$

ур-е движения гироскопа.

Симметричный гироскоп $\Rightarrow J_x = J_y$

$J_z \underbrace{\dot{\Omega}_z}_{\text{ускорение}} = M_z^{вн}$ – 2-ой закон Ньютона

$\Omega_z = const$

$M_z^{вн} = 0 = \underbrace{M_z^{дв.}}_{\text{двигателя}} - \underbrace{M_z^{сопр}}_{\text{момент сопротивление}}$

$M_z^{дв} = M_z^{сопр}$

$$\begin{cases} J_x \dot{\Omega}_x - (J_y - J_z)\omega_y \omega_z + J_z \dot{\varphi}\, \omega_y = M_x^{вн} \\ \underbrace{J_y \dot{\Omega}_y}_{I} - (\underbrace{J_z - J_y}_{II})\omega_x \omega_z - \underbrace{J_z \dot{\varphi}\, \omega_x}_{III} = M_y^{вн.} \end{cases}$$ "внешний"

II – центробежные инерц. моменты, не зависящие от скорости собств. вращения

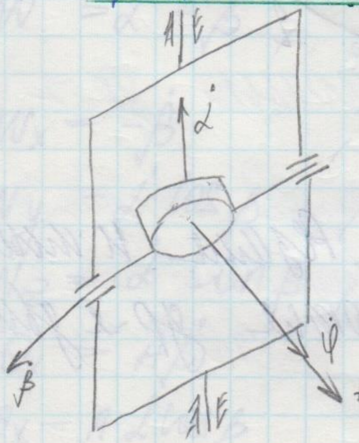
I – инерц. момент обыкновенного тв. тела

основная часть Ω_z это $\dot{\varphi}$.

III – большая часть гироскопического момента.

α, β, φ – углы Резаля

Уравнение гироскопа в осях Резаля



α – угол поворота вокруг оси наруж. рамы

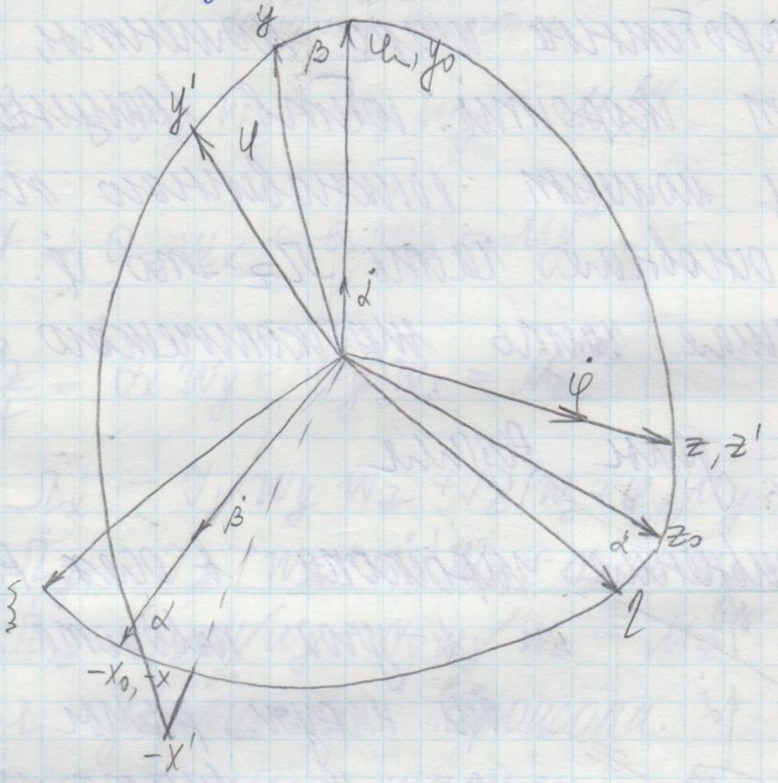
β – —"— внутр. рамки

φ – угол поворота вокруг оси собств. вращения

Положит. направлением для угла β явл. отриц. напр. оси x

α, β, ψ – углы поворота ротора гироскопа относит. основание

$\xi \eta \zeta$ – СК, связанная с основанием.

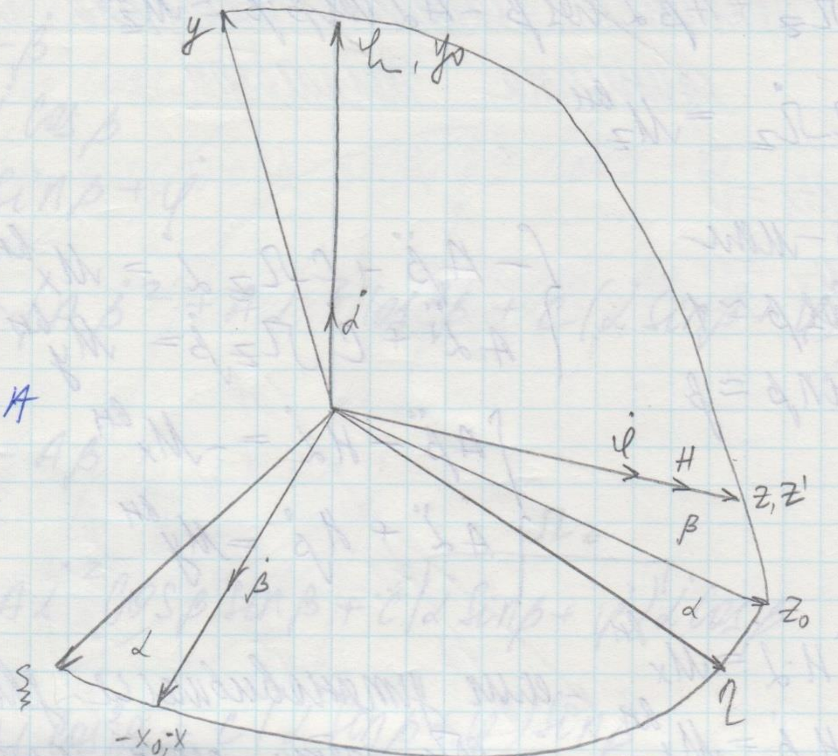


Оси x, y, z – явл. осями Резаля и именно в этих осях составляются ур-е движения гироскопа

x_0, y_0, z_0 – нар. рамка

x, y, z – внутр. рамка

x', y', z' – ротор



$J_x = J_y = A$

$J_z = C$

$\bar{w} = \bar{\dot\alpha} + \bar{\dot\beta}$; $\bar\Omega = \bar{w} + \bar{\dot\varphi} = \bar{\dot\alpha} + \bar{\dot\beta} + \bar{\dot\varphi}$

$w_x = -\dot\beta$; $\Omega_x = -\dot\beta$

$w_y = \dot\alpha\cos\beta$; $\Omega_y = \dot\alpha\cos\beta$

$w_z = \dot\alpha\cdot\sin\beta$; $\Omega_z = \dot\alpha\sin\beta + \dot\varphi \approx \dot\varphi$

$\theta_x = A\dot\beta$

$\theta_y = A\cdot\dot\alpha\cos\beta$

$\theta_z = C\Omega_z$

$$\begin{cases} -A\ddot\beta - A\dot\alpha\cos\beta\,\dot\alpha\sin\beta + C\Omega_z\dot\alpha\cos\beta = M_x^{вн} \\ A\ddot\alpha\cos\beta - A\dot\alpha\dot\beta\sin\beta + C\Omega_z\dot\beta - A\dot\beta\dot\alpha\sin\beta = M_y^{вн} \end{cases}$$

$C\dot{\Omega}_z + A\dot{\beta}\dot{\alpha}\cancel{\cos\beta} - A\dot{\alpha}\cancel{\cos}\beta\cdot\dot{\beta} = M_z^{вн}$

$C\dot{\Omega}_z = M_z^{вн}$

β – мал

$\cos\beta \simeq 1$

$\sin\beta \simeq \beta$

$$\begin{cases} -A\ddot{\beta} + C\Omega_z\dot{\alpha} = M_x^{вн} \\ A\ddot{\alpha} + C\Omega_z\dot{\beta} = M_y^{вн} \end{cases}$$

$$\begin{cases} A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = -M_x^{вн} \\ A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = M_y^{вн} \end{cases}$$

$$\begin{cases} H\cdot\dot{\alpha} = M_x^{вн} \\ H\dot{\beta} = M_y^{вн} \end{cases}$$ – если установившееся движение (без учета перех. процессов)

Выведем ур-е с помощью ур-я Лагранжа 2-го рода:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i$$

T – кинетич. энергия системы

Q_i – обобщенная сила

q_i – обобщенные координаты

	q_i	Q_i
x	$-\beta$	$M_x^{вн}$
y	α	$M_y^{вн}\cos\beta + M_z^{вн}\sin\beta$
z	φ	$M_z^{вн}$

$$T = \frac{1}{2}\left(A\Omega_x^2 + A\Omega_y^2 + C\Omega_z^2\right)$$

2. Прецессия и нутация гироскопа

Прецессия - стр. 10 (9) со слов: “Если на гироскоп действуют возмущающие моменты”
Нутация начинается на стр. 16 (15) со слов: “Пользуясь принципом Даламбера, составим уравнение” и заканчивается на следующей странице словами: “которую называют частотой нутации гироскопа.”

вают кажущимся (или видимым) уходом гироскопа. Если на гироскоп действуют возмущающие моменты M_ζ и M_x (вокруг осей карданова подвеса), то возникает угловая скорость поворота (прецессия) ротора вокруг осей подвеса (*2-е свойство*):

$$\dot{\beta} = \frac{M_\zeta}{H}; \quad \dot{\alpha} = \frac{M_x}{H}, \qquad (1)$$

где β, α — углы поворота ротора вокруг осей внутренней и наружной рамок гироскопа ($\beta_0 = 0, \alpha_0 = 0$).

Скорость отклонения гироскопа под действием возмущающих (вредных) моментов называют собственной скоростью прецессии (ССП) гироскопа $\omega_{ссп}$, скоростью ухода $\omega_{ух}$ (или дрейфа $\omega_{др}$) с размерностью °/ч, ′/мин, ″/с. ССП характеризует

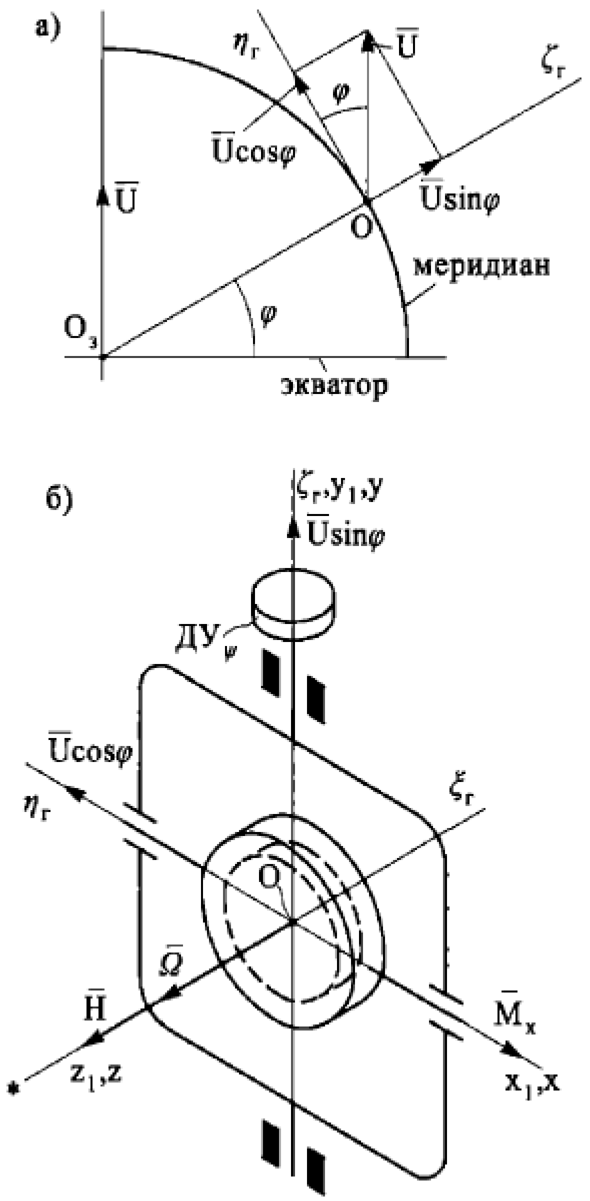


Рис. 2. К пояснению свойств трехстепенного гироскопа:

а — определение проекций горизонтальной $U\cos\varphi$ и вертикальной $U\sin\varphi$ составляющих угловой скорости $\overline{U}$ суточного вращения Земли на географическую СК $O\xi_г\eta_г\zeta_г$; *б* — трехстепенной гироскоп с рамкой в виде закрытого кожуха, внутри которого вращается ротор; выходной сигнал датчика угла $ДУ_\psi$ пропорционален углу ψ поворота (относительно оси наружной оси) объекта, на котором установлен гироскоп

точность гироскопа. Угловое отклонение гироскопа (уход, дрейф) за время Δt $\theta = \omega_{ССП}\,\Delta t$.

Погрешность измерения угла положения объекта относительно Земли с помощью гироскопа складывается из кажуще-

(рис. 7) с невесомыми рамками для малых углов α и β отклонения оси гироскопа от инерциальной СК $O\xi\eta\zeta$. Пользуясь принципом Даламбера, составим уравнение относительно осей $Oxyz$ (осей Резаля), связанных с внутренней рамкой гироскопа:

$$\bar{M}_{\text{ин}} + \bar{M}_{\text{г}} + \bar{M}_{\text{вн}} = 0, \tag{6}$$

где $M_{\text{ин}}$ — момент инерции твердого тела, равный произведению момента инерции A на угловое ускорение и направленный

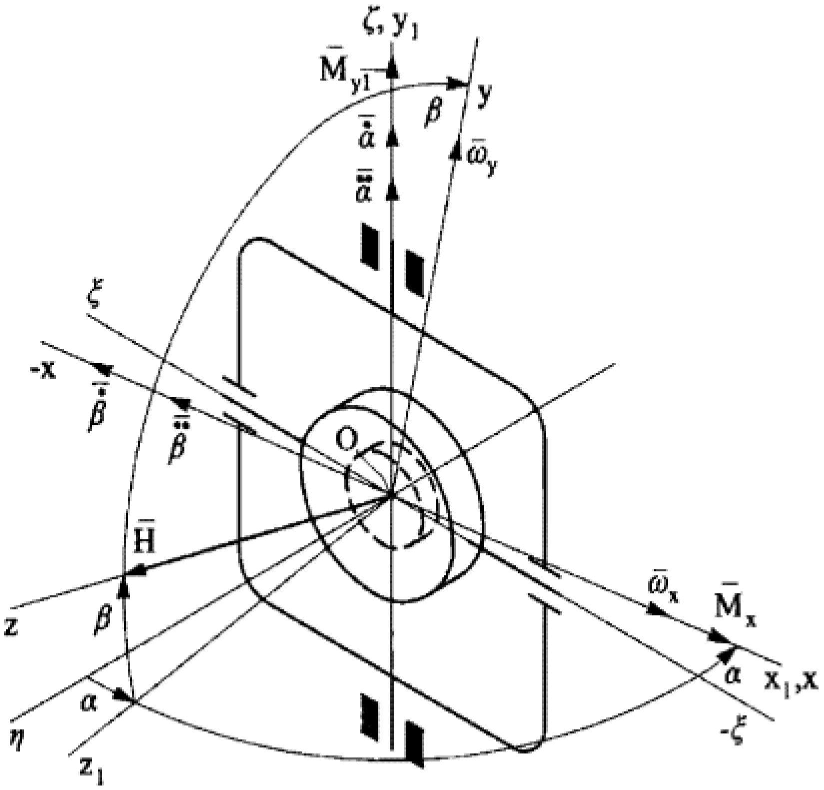


Рис. 7. К составлению уравнений движения трехстепенного гироскопа

противоположно вектору углового ускорения $\dot{\omega}_x$ и $\dot{\omega}_y$ ($-A\dot{\omega}_x$, $-A\dot{\omega}_y$); $M_г$ — гироскопический момент ($-H\omega_y$, $H\omega_x$); $M_{вн}$ — момент внешних сил.Абсолютные угловые скорости и угловые ускорения в проекциях на оси Резаля:

$$\begin{gathered}\omega_y = \dot{\alpha}\cos\beta \approx \dot{\alpha};\ \ \dot{\omega}_y = \ddot{\alpha};\\ \omega_x = -\dot{\beta};\ \ \dot{\omega}_x = -\ddot{\beta}.\end{gathered} \tag{7}$$

Уравнения вынужденного движения трехстепенного гироскопа в соответствии с выражением (6):

$$\begin{gathered}-A\dot{\omega}_x - H\omega_y + M_x = 0;\\ -A\dot{\omega}_y + H\omega_x + M_{y1} = 0\end{gathered} \tag{8}$$

или с учетом соотношений (7)

$$\begin{gathered}A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} + M_x = 0;\\ -A\ddot{\alpha} - H\dot{\beta} + M_y = 0,\end{gathered} \tag{9}$$

где A — экваториальный момент инерции ротора; M_x, $M_y \approx$ $\approx M_{y1}$ — внешние моменты, действующие вокруг осей карданова подвеса.

Собственное (свободное) движение гироскопа описывается уравнениями при $M_x = 0$, $M_y = 0$:

$$\begin{gathered}A\ddot{\beta} - H\dot{\alpha} = 0;\\ A\ddot{\alpha} + H\dot{\beta} = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Запишем определитель системы ($\ddot{\beta} = s^2\beta$; $\dot{\beta} = s\beta$; $\ddot{\alpha} = s^2\alpha$; $\dot{\alpha} = s\alpha$):

$$\Delta = \begin{vmatrix} As^2 & -Hs \\ Hs & As^2 \end{vmatrix} = A^2s^4 + H^2s^2 = s^2(A^2s^2 + H^2) = 0.$$

Корни уравнений: $s_{1,2} = 0$; $s_{3,4} = \frac{H}{A}i$, т. е. собственное (свободное) движение гироскопа представляет собой незатухающие гармонические колебания (нутацию) с частотой $n = \frac{H}{A}$, которую называют частотой нутации гироскопа.

Решение системы уравнений (10) найдем в виде